# Physik

## *Elektrizitätslehre*

---

### Der Gleichstromkreis

*Eine Zusammenfassung*

Datei Nummer 93011

Stand: 22. Nov. 2022

Demo-Text für www.mathe-cd.de

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

# Inhalt


1 Grundlagen:
Ladung, Spannung, Stromstärke, Widerstand, Arbeit und Leistung 3
Parallele Widerstände 6

2 Verzweigte Stromkreise 8

3 Schalter und Messgeräte 15

3.1 Wie muss man einen Schalter in einen Stromkreis einbauen? 15

3.2 Wie muss man Geräte in Stromkreise einbauen? 16

3.3 Wie muss man ein Voltmeter in einen Stromkreis einbauen? 18

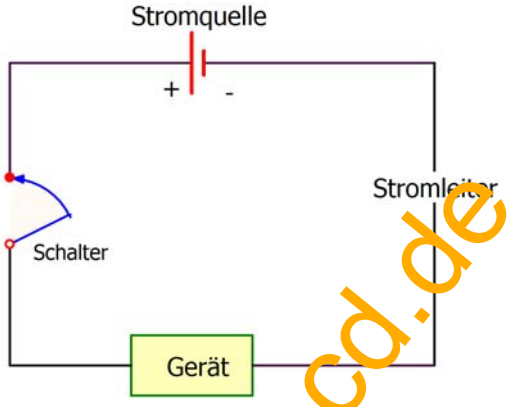
3.4 Wie muss man ein Amperemeter in einen Stromkreis einbauen? 20


Messbereichserweiterungen von Voltmetern und Amperemetern stehen im Text 93013

Demo-Text für www.mathe-cd.de

# 1 Grundlagen

Ein einfacher Stromkreis benötigt eine Stromquelle, eine Leitungsverbindung und kann Geräte enthalten.




Elektrischer Strom besteht aus bewegten Ladungen: In einem Draht sind es Elektronen. Diese tragen eine negative Ladung.

Das Entscheidende ist, dass sich Elektronen gegenseitig abstoßen.

Eine **Stromquelle** (Batterie, Steckdose u.a.) ist eine Vorrichtung, die eine sogenannte Spannung erzeugt, die im Minuspol Elektronen abstößt und nachliefert, und die Elektronen im Pluspol anzieht. Dadurch setzen sich entlang des Stromleiters frei bewegliche Elektronen in Bewegung und strömen dem Pluspol entgegen.

Es bewegen sich also nur negative Ladungen mit den Elektronen. Positive Ladungen sind zwar im Leitungsdraht auch vorhanden, bewegen sich aber nicht weiter.

Man kann im Versuch zeigen, dass sich gleichnamige Ladungen abstoßen und ungleichnamige anziehen. Aber wie gesagt, in unserem Stromkreis sind nur Elektronen unterwegs, die vom Minuspol abgestoßen und vom Pluspol angezogen werden.

Um einen Stromkreis zahlenmäßig erfassen zu können, benötigt man folgende Größen:

| | |
|---|---|
| Die transportierte oder aufgenommene **Ladungsmenge Q** | (Maßeinheit: Coulomb) |
| Die **Spannung U** zwischen zwei Punkten des Stromkreises | (Maßeinheit: Volt) |
| Die **Stromstärke** $I$ in einem Leiter | (Maßeinheit: Ampere) |
| Die beim Transportieren einer Ladung verrichtete **Arbeit W** | (Maßeinheit: Joule) |
| Die elektrische Leistung **P** | (Maßeinheit: Watt) |
| Der **Widerstand R**, den ein Gerät dem Strom entgegensetzt | (Maßeinheit: Ohm) |
| Und natürlich die **Zeitspanne t** eines Vorgangs | (Maßeinheit: Sekunde) |

Beginnen wir mit der ***Stromstärke I***.

Sie ist definiert als die pro Sekunde durch einen Querschnitt transportierte Ladungsmenge Q:

$$I = \frac{Q}{t}, \text{ oft auch so bezeichnet: } I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

Die Stromstärke beträgt 1 Ampere (= 1 A), wenn in der Zeitspanne $t = 1\ s$ die Ladung $Q = 1$ Coulomb $(= 1\,C)$ durch einen Querschnitt geflossen ist.

Kleinere Einheiten sind $1\ mA = 10^{-3}\ A$ (Milliampere)

$1\,\mu A = 10^{-6}\ A$ (Mikroampere)

Aus $I = \frac{Q}{t}$ folgt $Q = I \cdot t$, sodass die Ladungseinheit 1 C dasselbe ist wie 1 As (Ampere-Sekunde)

Demo-Text für www.mathe-cd.de

### *Dann die Spannung U:*

Die von der Stromquelle (man sagt auch Spannungsquelle) verrichtete Arbeit W ist der transportierten Ladungsmenge Q proportional.

Das bedeutet mathematisch, dass der Quotient aus der Arbeit W und der Ladung Q konstant ist. Diese Konstante nimmt man als Maß für die Spannung U:

$$U = \frac{W}{Q}$$

Die Spannung kann man sich also vorstellen als die nötige Energie (Arbeit), die man braucht, um die Ladungsmenge 1 C zu transportieren.

Für die Einheiten ergibt diese Gleichung: $1\,V = \frac{1\,Joule}{1\,C} = \frac{1\,Joule}{1\,As.}$

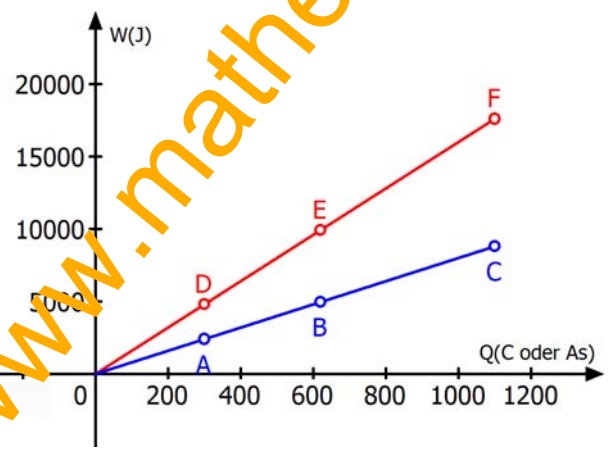
*Graphisches Beispiel:* (Experiment-Daten)

Für die Messpunkte A, B und C gilt:

$$U_A = \frac{2400\,J}{300\,As} = 8\,V$$

$$U_B = \frac{4960\,J}{620\,As} = 8\,V$$

$$U_C = \frac{8800\,J}{1100\,As} = 8\,V$$

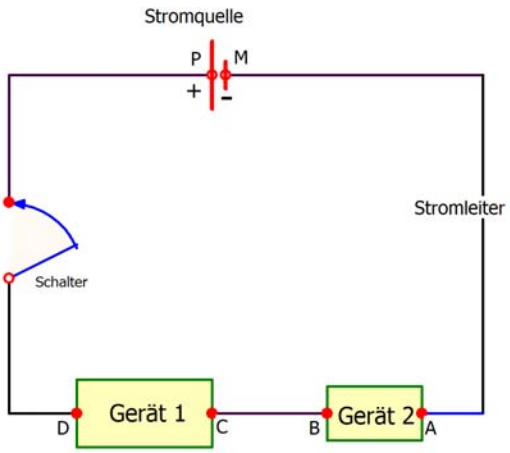



Für die Messpunkte D, E und F gilt:

$$U_D = \frac{4800\,J}{300\,As} = 16\,V\,, \quad U_E = \frac{9920\,J}{620\,As} = 16\,V\,, \quad U_F = \frac{17600\,J}{1100\,As} = 16\,V$$

Die Spannung kann man mit der **potentiellen Energie** vergleichen, die ein Körper auf Grund einer Höhenlage besitzt, und die ihn bewegt, in Bewegung zu kommen, wobei die potentielle Energie schrittweise in kinetische Energie umgewandelt wird.

Liegt an der Stromquelle P-M die Spannung $U_o = 16$ Volt an, dann wird diese elektrische Energie dazu verwendet, die Elektronen im Stromkreis in Bewegung zu versetzen. Entlang dieses Stromkreises setzen die im Leiter und in den Geräten vorhandenen Teilchen den Elektronen einen Widerstand entgegen. Der ist im Leiter meist klein, dass man ihn vernachlässigen kann.
Aber der durch die Geräte gebildete elektrische Widerstand „verbraucht" Energie. Man sagt die Spannung fällt dort ab.




Rechts sieht man eine ***Reihenschaltung*** zweier Geräte.
Wir werden dazu aus dem Spannungsabfall die Größe der Widerstände berechnen.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Wir wollen ein Messgerät verwenden um Spannungen zu messen, also ein Voltmeter.
Und wir stellen uns vor, dass wir

zwischen A und B eine Spannung von 6 V (Volt) messen,
zwischen C und D 10 V
und zwischen den Polen P und M (Plus und Minus) 16 V.

Dann gilt: Der Spannungsabfall entlang des Stromkreises ist insgesamt genau so groß wie die „angelegte Spannung“ an der Stromquelle:

$$U_{AB} = 6\text{ V},\quad U_{CD} = 10\text{ V} \quad \Rightarrow \quad U_{PM} = 16\text{ V} = U_{AB} + U_{CD}$$

Das stimmt nur näherungsweise, weil auch im Leiter elektrische Energie verbraucht wird, also Spannung abfällt. Aber das ist so wenig, dass man es vernachlässigen kann.

Dazu kommt noch ein zweites Problem: Jedes Messgerät muss in den Stromkreis geschaltet werden, das verändert sofort die Größenverhältnisse, also Spannungsabfall, Stromstärke und Widerstand. Das heißt, jede Messung verfälscht automatisch die Daten.

Der Strom hat in diesem Stromkreis überall dieselbe Stärke. Nehmen wir an, die Stromstärke beträgt $I = 0{,}2\text{ A}$, dann kann man die Stärke der **Widerstände** berechnen, die unsere beiden Geräte haben. Man nimmt den Quotienten $R = \frac{U}{I}$ als Maß für den Widerstand (**Ohmsches Gesetz**). Die sich daraus ergebende Maßeinheit ist Volt pro Ampere, man sagt dafür Ohm mit dem Zeichen $\Omega$. Stellt man diese Formel um nach $I = \frac{U}{R}$, dann erkennt man: Je größer der Widerstand R, desto kleiner ist die Stromstärke.

<u>In unserem Beispiel folgt</u>: $R = \frac{16\text{V}}{0{,}2\text{A}} = 80\text{ Ohm} = 80\ \Omega$

Der Stromkreis hat also einen Gesamtwiderstand von $80\ \Omega$

Wenn am Gerät 1 ein Spannungsabfall von 10 V herrscht, dann hat Gerät 1 diesen Widerstand: $R_1 = \frac{10\text{ V}}{0{,}2\text{ A}} = 50\ \Omega$

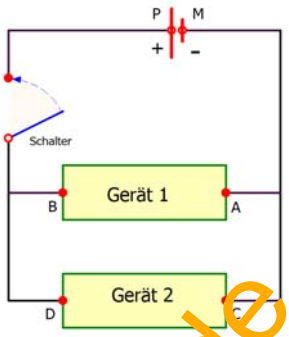
Wenn an Gerät 2 ein Spannungsabfall von 6 V herrscht, dann hat Gerät 2 diesen Widerstand: $R_2 = \frac{6\text{ V}}{0{,}2\text{ A}} = 30\ \Omega$

Man erkennt: $U_1 + U_2 = U_{ges}$ und $R_1 + R_2 = R_{ges,}$

**In einer Reihenschaltung (in der die Widerstände hintereinander geschaltet sind), addieren sich die einzelnen Widerstände zum Gesamtwiderstand.**

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Nun betrachten wir eine ***Parallelschaltung*** zweier Geräte:
Mit unserem Energiemodell versteht man rasch, dass
am Gerät 1 dieselbe Spannung anliegt wie an Gerät 2.




Stellen wir uns vor, dass die Elektronen ab dem Minuspol fließen, zwischen P und M haben wir angenommene 16 Volt. Dann liegen die Punkte A und C auf demselben Energielevel, denn entlang des Leiters von M nach A oder C geht praktisch keine Energie verloren, d.h. der Spannungsabfall zwischen A und B sowie zwischen C und D ist auch 16 V.

Das vergleichen wir auch mit zwei Körpern mit derselben Höhenlage, die parallel nach unten fallen und dabei unten mit derselben Geschwindigkeit auftreffen.
Die Elektronen „fallen“ in diesem Bild also von A nach B bzw. von C nach D.

Allerdings: Der Elektronenstrom teilt sich in zwei Teilströme $I_1$ und $I_2$ durch die beiden Geräte.

Es gilt also $I = I_1 + I_2$

Andererseits ist ja $I = \frac{U}{R}$ und $I_1 = \frac{U_1}{R_1}$ und $I_2 = \frac{U_2}{R_2}$

Damit folgt zunächst $\frac{U}{R} = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2}$.

Nun sollte man bedenken, dass bei Parallelschaltung dieselbe Spannung anliegt (abfällt),

also $U_1 = U_2 = U$: $\frac{U}{R} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}$.

Dividiert man durch U, dann folgt eine sehr wichtige Formel, die uns zeigt, wie man den

**Gesamtwiderstand zweier paralleler Widerstände** berechnet:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

**Beispiel**: Aus $R_1 = 50\,\Omega$ und $R_2 = 30\,\Omega$ folgt bei Parallelschaltung ein Gesamtwiderstand R durch

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{50\,\Omega} + \frac{1}{30\,\Omega} = \frac{3}{150\,\Omega} + \frac{5}{150\,\Omega} = \frac{8}{150\,\Omega}$$

Also: $R = \frac{150}{8}\Omega = 18{,}75\,\Omega$

Der Gesamtwiderstand ist also kleiner als jeder der beiden Einzelwiderstände.
Das kann man sich ganz einfach klar machen: Es gibt nun zwei Stromwege statt nur einem:
Den Elektronen stehen nun die Wege AB und CD zur Verfügung, also hat der Widerstand abgenommen und die Stromstärke hat zugenommen.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Wir können jetzt unser Beispiel fortsetzen:

Bei einer angelegten Spannung von 16 Volt und einem Gesamtwiderstand von

$R = \frac{150}{8}\Omega = 18{,}75\ \Omega$, ist die Stromstärke in der gemeinsamen Zuleitung

$$I = \frac{U}{R} = \frac{16\ V}{18{,}75\ \Omega} = 0{,}853\ A$$

Durch Gerät 1 mit $R_1 = 50\ \Omega$ und der Spannung U = 16 V fließt dann

ein Strom der Stärke $I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{16\ V}{50\ \Omega} = 0{,}32\ A$

Durch Gerät 2 mit $R_1 = 30\ \Omega$ und der Spannung U = 16 V fließen dann

$$I_1 = \frac{U}{R_2} = \frac{16\ V}{30\ \Omega} \approx 0{,}533\ A$$

Hinter den Punkten B und D kommen beide Teilströme zusammen und bilden dann

einen Gesamtstrom mit $I = I_1 + I \approx 0{,}32\ A + 0{,}533\ A = 0{,}853\ A$,

wie es oben bereits berechnet worden ist.

Dies war also eigentlich nur eine Kontrolle.

**Ein Hinweis auf den Sprachgebrauch**.

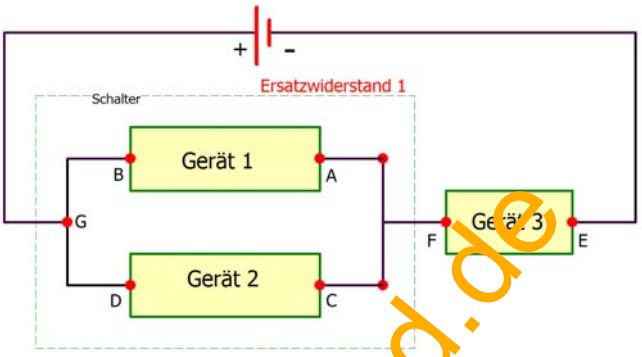
Es gibt unterschiedliche Formulierungen: Statt Gesamtwiderstand sagt man auch Ersatzwiderstand. Statt die Spannung liegt an, sagt man auch „die Spannung fällt ab“, weniger gut ist „die Spannung wird verbraucht – wie Energie wird verbraucht, was ja falsch ist, denn sie wird immer nur umgewandelt, etwa in Wärme (z. B. Glühlampe). Das sind oft anschauliche Formulierungen, welche die doch komplexen Vorgänge verständlich machen können.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

# 2 Verzweigte Stromkreise

**Beispiel 1:**

In nebenstehendem Stromkreis berechnet man zuerst den Ersatzwiderstand $R_{E1}$ zu $R_1$ und $R_2$. Er hat dieselbe Wirkung wie die parallelen Widerstände $R_1$ und $R_2$ zusammen.




Dann berechnet man die Reihenschaltung von $R_E$ und $R_3$. Das ist dann der Gesamtwiderstand im Stromkreis, bzw. der Ersatzwiderstand $E_2$.

**Parallelschaltung**: $$\frac{1}{R_{E1}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 \cdot R_2} \quad \Rightarrow \quad R_{E1} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

**Reihenschaltung**: $$R_{E2} = R_{E1} + R_3 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_3 .$$

**Mit Zahlen:** Es seien $R_1 = 6\ \Omega$, $R_2 = 12\ \Omega$ und $R_3 = 4\ \Omega$.

Dann kann man entweder in dieses allgemeine Ergebnis einsetzen:

$$R_{E2} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_3 = \frac{6\ \Omega \cdot 12\ \Omega}{6\Omega + 12\ \Omega} + 4\ \Omega = \frac{{}^{1}\cancel{6\ \Omega} \cdot 12\ \Omega}{{}_{3}\cancel{18\ \Omega}} + 4\ \Omega = 4\ \Omega + 4\ \Omega = 8\ \Omega.$$

Oder man berechnet schrittweise zuerst $R_{E1}$ und dann $R_{E2}$:

$$\frac{1}{R_{E1}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{6\ \Omega} + \frac{1}{12\ \Omega} = \frac{2}{12\ \Omega} + \frac{1}{12\ \Omega} = \frac{1}{6\ \Omega} + \frac{3}{12\ \Omega} = \frac{1}{4\ \Omega} \quad \Rightarrow \quad R_{E1} = 4\ \Omega$$

und dann $R_{R2} = R_{E1} + R_3 = 4\ \Omega + 4\ \Omega = 8\ \Omega$ .

Damit haben wir diese drei Widerstände durch einen Gesamt- oder Ersatzwiderstand ersetzt.

Kennt man die angelegte Spannung von U = 24 V, dann kann man weitere Detailfragen berechnen:
Gesamtstrom (z. B zwischen Minuspol und Punkt E):

$$I = \frac{U}{R} = \frac{24\ V}{8\ \Omega} = 3\ A$$

Spannungsabfall an $R_3$: $U_3 = R_3 \cdot I = 4\ \Omega \cdot 3\ A = 12\ V$

Damit fällt die restliche Spannung (die an der Parallelschaltung anliegt), zwischen F und G ab, und das sind $U_{FG} = 24V - 12V = 12\ V$ .

Diese Spannung gilt für die parallelen Widerstände: $U_1 = 12\ V = U_2$.

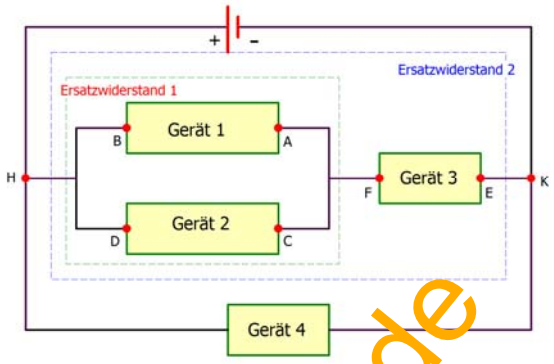
Nun können wir auch die Stromstärken durch die parallelen Geräte ermitteln

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{12\ V}{6\ \Omega} = 2\ A \quad \text{und} \quad I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{12\ V}{12\Omega} = 1\ A$$

Durch den Ersatzwiderstand $R_{E1}$ fließen somit $I = I_1 + I_2 = 3A$ . Diesen Wert haben wir oben schon auf andere Weise ermittelt. *Also war das eine Kontrolle.*

Demo-Text für www.mathe-cd.de

**Beispiel 2:**




Hier wird man zuerst den Ersatzwiderstand $R_{E1}$ für $R_1$ und $R_2$ berechnen.
Dann den Ersatzwiderstand $E_{R2}$, der $R_{E1}$ und $R_3$ umfasst, bevor wir dann den Gesamtwiderstand liefern können.

Ich rechne in diesem doch komplizierten Fall sofort mit Zahlen: Gegeben seien

$R_1 = 20\ \Omega,\ R_2 = 5\ \Omega,\ R_3 = 6\ \Omega,\ R_4 = 10\ \Omega$ und eine angelegte Spannung $U_o = 24V$

Ersatzwiderstand $R_{E1}$: $\frac{1}{R_{E1}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{20\ \Omega} + \frac{1}{5\ \Omega} = \frac{1+4}{20\ \Omega} = \frac{5}{20\ \Omega} \Rightarrow R_{E1} = \frac{20}{5}\Omega = 4\ \Omega$

Ersatzwiderstand $R_{E2}$: $R_{E2} = R_{E1} + R_3 = 4\ \Omega + 6\ \Omega = 10\ \Omega$

Gesamtwiderstand R: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_{E2}} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{10\ \Omega} + \frac{1}{10\ \Omega} = \frac{2}{10\ \Omega} \Rightarrow R = 5\Omega$.

Nun die Teilspannungen und Stromstärken.

Die angelegte Spannung sei $U_o$ = 24 Volt, dann ist im unverzweigten Teil des Stromkreises $I = \frac{U_o}{R} = \frac{24\ V}{5\ \Omega} = 4{,}8\ A$. Diese 24 Volt liegen auch an den Parallelzweigen an, also an $R_4$ und an der Schaltung der Widerstände $R_1$, $R_2$ und $R_3$.

Durch $R_4$ fließt daher ein Strom der Stärke $I_4 = \frac{U_o}{R_4} = \frac{24\ V}{10\ \Omega} = 2{,}4\ A$:

Der Reststrom $I_3 = I - I_4 = 2{,}4\ A$ fließt durch $R_3$ und die folgende Parallelschaltung.

Damit kann man auch berechnen, welcher Spannungsabfall an $R_3$ passiert:
$U_3 = R_3 \cdot I_3 = 6\ \Omega \cdot 2{,}4\ A = 14{,}4\ V$.

Da zwischen den Punkten K und H 24 Volt anliegen, und davon 14,4 V an $R_3$, bleiben für die Parallelschaltung von $R_1$ und $R_2$ also zwischen F und G noch $U_{1,2} = 24\ V - 14{,}4\ V = 9{,}6\ V$.
Diese Spannung fällt also sowohl an $R_1$ wie auch an $R_2$ ab, was zu diesen Stromstärken führt:

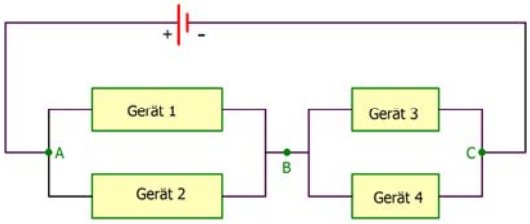
Durch $R_1$: $I_1 = \frac{U_{12}}{R_1} = \frac{9{,}6\ V}{20\ \Omega} = 0{,}48\ A$

durch $R_2$: $I_2 = \frac{U_{12}}{R_{12}} = \frac{9{,}6\ V}{5\ \Omega} = 1{,}92\ A$

Zur Kontrolle kann man die drei Teilströme addieren: $\underbrace{I_1 + I_2}_{=I_3} + I_4 = \underbrace{0{,}48\ A + 1{,}92\ A}_{2{,}4\ A} + 2{,}4\ A = 4{,}8\ A$.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

## Aufgabe 1:

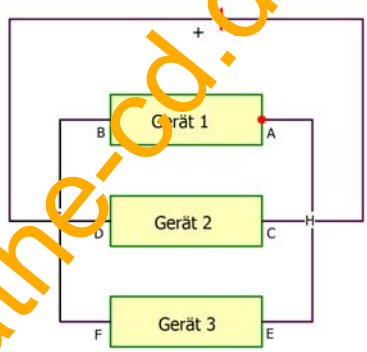



Hier sind zwei Paare paralleler Widerstände in Reihe geschaltet.

Berechne zu folgenden Daten Spannungsabfälle und Stromstärken:

$R_1 = 50\ \Omega,\ R_2 = 200\ \Omega,\ R_3 = 150\ \Omega,\ R_4 = 100\ \Omega,\ U_o = 220\ V$ .

## Aufgabe 2:




**Gegeben sind** $R_1 = 25\ \Omega,\ R_2 = 50\ \Omega$ und $R_3 = 150\ \Omega$ **.**

Welche Stromstärken gehören zu den Widerständen?

Was folgt daraus für die Teilströme, wenn $U_o$ = 60 V angelegt wird?

## Aufgabe 3:

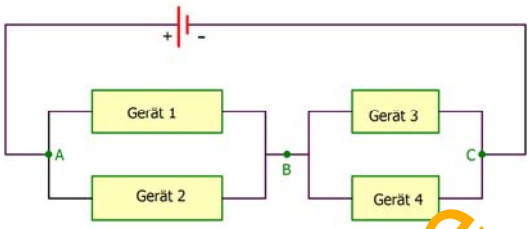
Erstelle einen Stromkreis, in dem 4 gleich große Widerstände $R_i$ = 100 $\Omega$ (i = 1, 2, 3, 4) auf alle denkbaren verschiedenen Arten zusammengeschaltet sind.

Welche verschiedenen Gesamtwiderstände sind möglich?

Demo-Text für www.mathe-cd.de

# Lösungen

## Aufgabe 1:




In diesem Beispiel sind zwei Paare paralleler Widerstände in Reihe geschaltet.

Berechne zu folgenden Daten Spannungsabfälle und Stromstärken:

$$R_1 = 50\ \Omega,\ R_2 = 200\ \Omega,\ R_3 = 150\ \Omega,\ R_4 = 100\ \Omega,\ U_o = 220\ \text{V}.$$

## Lösung:

Ersatzwiderstand für die Parallelschaltung von $R_1$ und $R_2$:

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{50\ \Omega} + \frac{1}{200\ \Omega} = \frac{4}{200\ \Omega} = \frac{1}{50\ \Omega} \quad \Rightarrow \quad R_{12} = 50\ \Omega$$

Ersatzwiderstand für die Parallelschaltung von $R_3$ und $R_4$:

$$\frac{1}{R_{34}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{150\ \Omega} + \frac{1}{100\ \Omega} = \frac{5}{300\ \Omega} = \frac{1}{60\ \Omega} \quad \Rightarrow \quad R_{34} = 60\ \Omega$$

Der Gesamtwiderstand ist die Reihenschaltung dieser beiden Ersatzwiderstände:

$$R = R_{12} + R_{34} = 110\ \Omega$$

Damit hat der Strom die Stärke $I_o = \frac{U_o}{R} = \frac{220\ \text{V}}{110\ \Omega} = 2\ \text{A}$.

Er verteilt sich dann im Punkt C auf $R_3$ und $R_4$.

Dies kann man trickreich so berechnen:

**An den parallelen Widerständen** $R_3$ und $R_4$ liegt dieselbe Spannung an: $U_3 = U_4$.

Daher gilt: $\boxed{U_3 = R_3 \cdot I_3} = \boxed{R_4 \cdot I_4 = U_4}$ und das führt zu.

$$\frac{I_4}{I_3} = \frac{R_3}{R_4}$$

Stromstärke und Widerstand sind zueinander umgekehrt proportional.
Doppelt so großer Widerstand ergibt halb so große Stromstärke usw.

Also erhält man: $\frac{I_4}{I_3} = \frac{150\ \Omega}{100\ \Omega} = 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_4 = 1{,}5 \cdot I_3}$ (*)

Andererseits ist: $I_3 + I_4 = I_o = 2\ \text{A}$

Setzt man (*) ein, folgt $I_3 + 1{,}5 \cdot I_3 = 2\ \text{A} \quad \Leftrightarrow \quad 2{,}5 \cdot I_3 = 2\ \text{A} \quad \Rightarrow \quad I_3 = \frac{2}{2{,}5}\ \text{A} = 0{,}8\ \text{A}$

Und aus (*) folgt: $I_4 = 1{,}5 \cdot 0{,}8\ \text{A} = 1{,}2\ \text{A}$.

Und zusammen sind das wieder 2 Ampere.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Analog geht man bei der Parallelschaltung von $R_1$ und $R_2$ vor:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{200\ \Omega}{50\ \Omega} = 14 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_1 = 4 \cdot I_2} \qquad (**)$$

Andererseits ist: $I_1 + I_2 = I_o = 2\ \text{A}$

Setzt man (**) ein, folgt $4 \cdot I_2 + I_2 = 2\ \text{A} \quad \Leftrightarrow \quad 5 \cdot I_2 = 2\ \text{A} \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{2}{5}\text{A} = 0{,}4\ \text{A}$

Und aus (**) folgt: $I_1 = 4 \cdot 0{,}4\ \text{A} = 1{,}6\ \text{A}$ .

Und zusammen sind das wieder 2 Ampere.

Bei dieser Methode sind jetzt die Teilspannungen für die Ersatzwiderstände der Parallelschaltungen unter den Tisch gefallen, weil wir sie wegen der Verhältnisgleich nicht benötigt haben.

Aber sie sind schnell berechnet:

Für $R_1$ und $R_2$ haben wir den Ersatzwiderstand $R_{12} = 50\ \Omega$ berechnet.

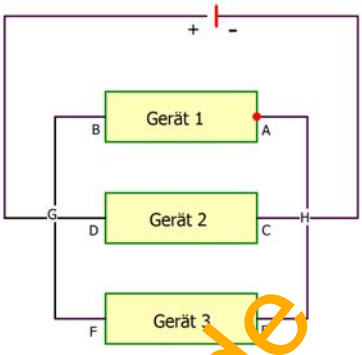
Durch ihn fließen 2 A, das führt zu $U_{12} = R_{12} \cdot I = 50\ \Omega \cdot 2\ \text{A} = 100\ \text{V}$

Genauso kann man berechnen $U_{34} = R_{34} \cdot I = 60\ \Omega \cdot 2\ \text{A} = 120\ \text{V}$ .

Oder man verwendet: $U_{12} + U_{34} = U_o \quad \Rightarrow \quad U_{34} = U_o - U_{12} = 220\ \text{V} - 100\ \text{V} = 120\ \text{V}$.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

## Aufgabe 2:




**Gegeben sind** $R_1 = 25\ \Omega$, $R_2 = 50\ \Omega$ und $R_3 = 150\ \Omega$.

Welche Stromstärken gehören zu den Widerständen?

Was folgt daraus für die Teilströme, wenn $U_o$ = 60 V angelegt wird?

## Lösung:

Für den Ersatzwiderstand gilt jetzt: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$

Mit Zahlen: $\frac{1}{R} = \frac{1}{25\ \Omega} + \frac{1}{50\ \Omega} + \frac{1}{150\ \Omega} = \frac{12+6+2}{300\ \Omega} = \frac{20}{300\ \Omega} \Rightarrow R = \frac{300}{20}\ \Omega = 15\ \Omega$

Gesamtstromstärke: $I = \frac{U}{R} = \frac{60\ V}{15\ \Omega} = 4\ A$

Die angelegte Spannung gilt für jeden der parallelen Widerstände, also kann man damit die Teilströme berechnen:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{60\ V}{25\ \Omega} = 2{,}4\ A$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{60\ V}{50\ \Omega} = 1{,}2\ A$$

$$I_3 = \frac{U}{R_3} = \frac{60\ V}{150\ \Omega} = 0{,}4\ A$$

Zur Bestätigung: $I_1 + I_2 + I_3 = 4\ A$.

Und man kann auch die Verhältnisgleichung verwenden:

$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$. Weil $R_2$ doppelt so groß ist wie $R_1$, fließt durch $R_2$ nur ein halb so starker Strom usw.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

## Aufgabe 3:

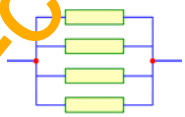
Erstelle einen Stromkreis, in dem 4 gleich große Widerstände $R_i = 100\ \Omega$ (i = 1, 2, 3, 4) auf alle denkbaren verschiedenen Arten zusammengeschaltet sind.
Welche verschiedenen Gesamtwiderstände sind möglich?

## Lösung:

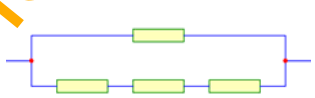
Beachtet man nicht die Reihenfolge der Widerstände, dann ergeben sich folgende Möglichkeiten:

(1) $R = 4 \cdot 100\ \Omega = 400\ \Omega$

(2) $\frac{1}{R} = \frac{1}{100\ \Omega} + \frac{1}{100\ \Omega} + \frac{1}{100\ \Omega} + \frac{1}{100\ \Omega} = \frac{4}{100\ \Omega} \quad \Rightarrow \quad R = 25\ \Omega$

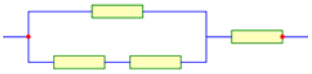


(3) $\frac{1}{R} = \frac{1}{300\ \Omega} + \frac{1}{100\ \Omega} = \frac{1+3}{300\ \Omega} = \frac{4}{300\ \Omega} \quad \Rightarrow \quad R = 75\ \Omega$

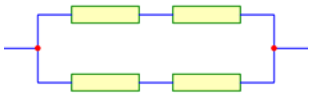


(4) $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{200\ \Omega} + \frac{1}{100\ \Omega} = \frac{3}{200\ \Omega} \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{200}{3}\Omega$

$R = \frac{200}{3}\ \Omega + 100\ \Omega \approx 166{,}7\ \text{V}$

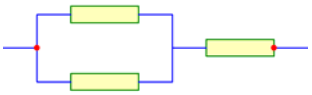


(5) $\frac{1}{R} = \frac{1}{200\ \Omega} + \frac{1}{200\ \Omega} = \frac{2}{200\ \Omega} = \frac{1}{100\ \Omega} \quad \Rightarrow \quad R = 100\ \Omega$



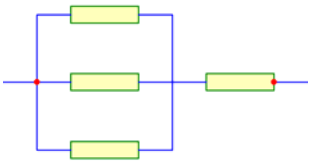
(6) $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{100\ \Omega} + \frac{1}{100\ \Omega} = \frac{2}{100}\Omega = \frac{1}{50\ \Omega} \quad \Rightarrow \quad R_1 = 50\ \Omega$

$R = 50\ \Omega + 100\ \Omega = 150\ \Omega$



(7) $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{100\ \Omega} + \frac{1}{100\ \Omega} + \frac{1}{100\ \Omega} = \frac{3}{100\ \Omega} \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{100}{3}\ \Omega$

$R = \frac{100}{3}\ \Omega + 100\ \Omega \approx 133{,}3\ \Omega$

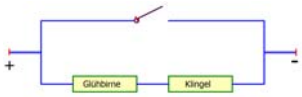


Demo-Text für www.mathe-cd.de

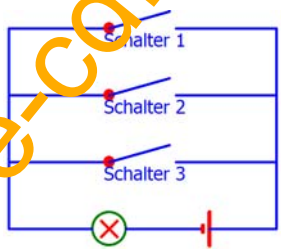
# 3 Schalter und Messgeräte

## 3.1 Wie muss man Schalter in Stromkreise einbauen?

Bei einem einzigen Schalter ist das noch kein Problem. Er muss in Reihe geschaltet werden mit anderen Geräten, zu denen er den Strom ein- oder ausschalten soll.
Ist er parallel zu dem betreffenden Gerät geschaltet, kann er den Stromkreis nicht unterbrechen.

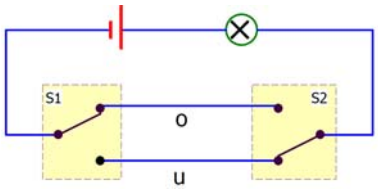



Nun betrachten wir diese Schaltung:
Schalter 1 befindet sich im Wohnzimmer, Schalter 2 im Schlafzimmer und Schalter 3 im Flur, wo sich auch die Glühbirne befindet.
Der Lehrling des Elektrikers hat diese Schaltung zusammengefügt.
Nun schauen wir uns an, was dabei passieren kann.




> Klaus steht nachts auf und will in den Flur. Im Schlafzimmer betätigt er den Lichtschalter, damit im Flur das Licht angeht. Er geht nun weiter ins Wohnzimmer. Dazu will er das Licht im Flur wieder löschen. Aber es klappt weder mit dem Schalter im Flur noch mit dem im Wohnzimmer. Denn wenn einer dieser drei Schalter geschlossen ist, brennt die Glühbirne unabhängig davon, in welcher Position die anderen Schalter sind.
> Ergebnis: Der Lehrling kann alles nochmals versuchen … Es war NIX.

Ein Beispiel einer funktionierenden Schaltung mit 2 **Wechselschaltern** sieht so aus:
Man kann die Funktionsweise so darstellen:




Jeder der Schalter, S1 und S2, kann 2 Zustände einnehmen:
*o (oben) und u (unter).*

Die Lampe leuchtet, wenn beide Schalter im gleichen Zustand sind, o oder u.
Wird dann an einem Schalter der Zustand geändert, dann geht das Licht wieder aus.
Das könnte ein *Protokoll* sein, was soeben passiert ist. Man beginnt mit dem Zustand o / o, dann wird immer wieder ein Schalter betätigt: Die Änderung wird in einem Kästchen angezeigt.

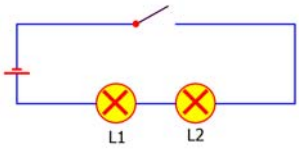
| S1 | S2 | Lampe leuchtet | Vorgang |
|---|---|---|---|
| o | o | ja | Anfangszustand |
| o | $\boxed{u}$ | nein | mit S2 ausgeschaltet |
| $\boxed{u}$ | u | ja | mit S1 eingeschaltet |
| $\boxed{o}$ | u | nein | mit S1 ausgeschaltet |
| $\boxed{u}$ | u | ja | mit S1 eingeschaltet |
| u | $\boxed{o}$ | nein | mit S2 ausgeschaltet |

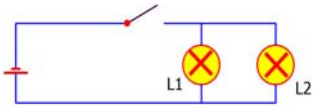
usw.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

## 3.2 Wie muss man Geräte in Stromkreise einbauen?

Wir schauen unserem Lehrling zu. Er soll einen Stromkreis zusammenbauen, der eine Stromquelle enthält, einen Schalter und zwei Glühbirnen. Diese sind beschriftet mit 75 W und 25 W. Er hat nun zwei Möglichkeiten:




Schließt man den Schalter, dann leuchten beide Lampen. Öffnet man ihn, dann gehen beide aus. Es gibt jedoch einen großen Unterschied: Sind die Lampen in Serie geschaltet (Abb. links), dann leuchten sie schwächer als bei der Parallelschaltung (Abb. rechts).

Wir wollen den Grund berechnen. Dazu müssen wir zu nächst einmal die Angaben 75 W und 25 W interpretieren. Diese beziehen sich auf die **Leistung** (Energie pro Sekunde) der Glühbirne.

Die Formel dazu ist $W = Q \cdot U$ und wegen $Q = I \cdot t$ (transportierte Ladung in der Zeitspanne t) erhält man $W = U \cdot I \cdot t$ also Maß für die verrichtete elektrische Arbeit.

Unter der Leistung P versteht man die pro Sekunde verrichtete Arbeit, also: $P = \frac{W}{t}$ bzw. $P = U \cdot I$

Mit Hilfe der Beziehung $U = R \cdot I$ kommt man auf $P = R \cdot I^2$ oder $P = \frac{U^2}{R}$

Der Lehrling verwendet für die Stromkreise $U = 220\ V$. Daraus können wir berechnen, welchen Widerstand die beiden Birnen darstellen. Dazu stellt man die Formel um nach $R = \frac{U^2}{P}$

Aus $P_1 = 75\ W$ folgt dann $R_1 = \frac{220^2}{75}\Omega \approx 645\ \Omega$

Aus $P_2 = 25\ W$ folgt dann $R_2 = \frac{220^2}{25}\Omega = 1936\ \Omega$

**Nun werten wir die Reihenschaltung aus.**

Hier addieren sich die Widerstände zu $R_{ges} = R_1 + R_2 = 2581\,\Omega$.

Bei $U_o = 220\ V$ ergibt das eine Stromstärke von $I = \frac{U_o}{R_{ges}} = \frac{220}{2581} A = 0{,}085\ A = 85\ mA$.

Damit können wir berechnen, welche Spannung an den beiden Glühbirnen abfällt:

$U_{75W} = R_1 \cdot I = 645\ \Omega \cdot 0{,}085\ A \approx 55\ V$ und $U_{25W} = R_2 \cdot I = 1936\ \Omega \cdot 0{,}085\ A \approx 165\ V$.

Die Folge ist, dass beide Lampen weniger stark leuchten, als sie sollten. Denn sie sollten beide an 220 V angeschlossen sein, was dann zu einer höheren Stromstärke führt.

Dies erreicht man mit einer Parallelschaltung, die wir jetzt durchrechnen:

Demo-Text für www.mathe-cd.de

**Bei der Parallelschaltung** erhält man den Ersatzwiderstand durch

$$\frac{1}{R_E} = \frac{1}{645\ \Omega} + \frac{1}{1936\ \Omega} = \frac{1936+645}{645\cdot 1936}\frac{1}{\Omega} \quad \Rightarrow \quad R_R = \frac{645\cdot 1936}{2581}\Omega \approx 484\ \Omega$$

Die angelegte Spannung von 220 V gilt bei einer Parallelschaltung für beide Zweige.
Damit kann man die Teilströme berechnen:

$$I_{75W} = \frac{U_o}{R_1} = \frac{220\ V}{645\ \Omega} \approx 0{,}341\ A = 341\,mA$$

und $$I_{25W} = \frac{220\ V}{1936\ \Omega} \approx 0{,}114 = 114\ mA$$

Was bedeuten diese Werte?

Die Glühbirne mit dem Aufdruck 25 W (Watt) leuchtet schwächer, denn die Stromstärke wird durch ihren höheren Innenwiderstand (1936 $\Omega$) stark begrenzt.
Bei der Reihenschaltung fließt durch sie sogar nur ein Strom der Stärke 85 mA.

Die Glühbirne mit dem Aufdruck 75 W (Watt) leuchtet heller, denn die Stromstärke wird durch ihren geringeren Innenwiderstand (645 $\Omega$) weniger stark begrenzt.
Der durch sie fließende Strom hat eine Stärke von 341 mA (das ist dreimal mehr als bei der 25-Watt-Birme, und etwa das Vierfache der unbrauchbaren Reihenschaltung.

Ergebnis: Man schaltet Geräte parallel, damit an ihnen jeweils dieselbe Spannung liegt.

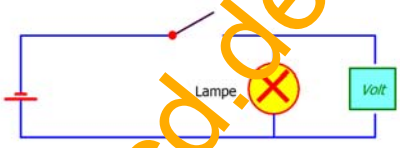
Hinweis: Im Betrieb verwendet man Wechselstrom statt Gleichstrom, dennoch sind unsere Berechnungen richtig.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

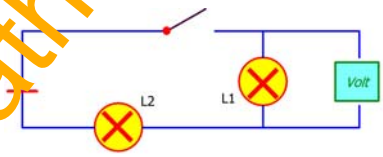
## 3.3 Wie muss man ein Voltmeter in einen Stromkreise einbauen?

Da Messgeräte auch einen Widerstand bilden, verändert ihre Anwesenheit die gesamte Situation des zu untersuchenden Stromkreises.

Beginnen wir mit einem Voltmeter zur Spannungsmessung. Hier ist die Antwort schnell gefunden: **Weil parallel geschaltete Geräte denselben Spannungsabfall haben, muss man ein Voltmeter parallel schalten.** Dann zeigt es die Spannung an, die auch an der Lampe abfällt. Nun passiert aber etwas Nachteiliges:
Durch die Parallelschaltung fließt ein Teil des Stromes durch das Voltmeter, sodass die Stromstärke in der Lampe abnimmt.
Damit durch das Voltmeter nur ein sehr schwacher Strom fließt, sollte der Innenwiderstand des Voltmeters möglichst hoch sein.




***Eine Rechenaufgabe zur Abbildung:***




Nun seien zwei Lampen in Reihe geschalteten

Beide haben einen Widerstand von $R_L = 400\ \Omega$. Das ergibt einen Gesamtwiderstand von $800\ \Omega$.
Ist das Voltmeter nicht angeschlossen, fließt bei angelegten 20 Volt ein Strom der Stärke
$I = \frac{U_o}{R} = \frac{20\ V}{800\ \Omega} = 0{,}025\ A = 25\ mA$. Und an jeder Lampe fallen bei gleichem Widerstand je 10 Volt ab.

Nun schalten wir das Voltmeter mit dem Innenwiderstand $R_V = 600\ \Omega$ parallel zur Lampe L1

und erzeugen damit einen Ersatzwiderstand von $\frac{1}{R_E} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_V} = \frac{1}{400\ \Omega} + \frac{1}{600\ \Omega} = \frac{3+2}{1200\ \Omega}$

$\Rightarrow\ R_E = \frac{1200}{5}\Omega = 240\ \Omega$: Der Gesamtwiderstand ist jetzt nur noch $R_{ges} = 400\ \Omega + 240\ \Omega = 640\ \Omega$.

Damit geht im unverzweigten Teil des Stromkreises die Stromstärke herauf auf

$$I_{ges} = \frac{U_o}{R_E} = \frac{20\ V}{640\ \Omega} \approx 0{,}031\ A = 31\ mA.$$

Also erhält man am Voltmeter, also auch an der Lampe L1 einen Spannungsabfall von

$$U_{1,V} = R_E \cdot I_{ges} = 240\ \Omega \cdot 0{,}031\ A = 7{,}5\ V \text{ statt } 10\ V.$$

Und folglich an $L_2$ einen Spannungsabfall von $U_{2,V} = 20V - 7{,}5\ V = 12{,}5\ V$ statt 10 V.

Ergebnis: Durch die Anwesenheit des Voltmeters wird für $R_1$ statt 10 V nur 7,5 V angezeigt, also hat die Spannung um $\Delta V = 2{,}5\ V$ abgenommen, das sind 25% Fehler!

*Der Leser sollte jetzt berechnen, wie sich diese Situation ändert, wenn unser Voltmeter einen Innenwiderstand von 6000 $\Omega$ (statt 600 $\Omega$) hat. Das Ergebnis folgt auf der nächsten Seite.*

Demo-Text für www.mathe-cd.de

**Lösung:**

Die angelegte Spannung ist $U_0 = 20\ V$. Beide in Reihe geschalteten Lampen haben einen Widerstand von $R_L = 400\ \Omega$. Das ergibt einen Gesamtwiderstand von 800 $\Omega$.

Ist das Voltmeter nicht angeschlossen, fließt ein Strom der Stärke $I = \frac{U_o}{R} = \frac{20\ V}{800\ \Omega} = 0{,}025\ A = 25\ mA$.

Und an jeder Lampe fallen bei gleichem Widerstand je 10 Volt ab. Das hatten wir bereits-

Nun schalten wir aber ein Voltmeter mit dem Innenwiderstand $R_V = 6000\ \Omega$ parallel zur Lampe L1 und erzeugen damit einen Ersatzwiderstand von $\frac{1}{R_E} = \frac{1}{400\ \Omega} + \frac{1}{6000\ \Omega} = \frac{15+1}{6000\ \Omega} = \frac{16}{6000\ \Omega}$

$\Rightarrow\ R_E = \frac{6000}{16}\Omega = 375\ \Omega$: Der Gesamtwiderstand ist jetzt: $R_{ges} = 400\ \Omega + 375\ \Omega = 775\ \Omega$.

Damit haben wir im unverzweigten Teil des Stromkreises eine Stromstärke von

$$I_{ges} = \frac{U_o}{R_E} = \frac{20\ V}{775\ \Omega} \approx 0{,}026\ A = 26\ \ mA.$$

Also erhält man am Voltmeter und an der Lampe L1 einen Spannungsabfall von

$$U_{1,V} = R_E \cdot I_{ges} = 375\ \Omega \cdot 0{,}026\ A = 9{,}75\ V \text{ statt } 10\ V.$$

Und folglich an $L_2$ einen Spannungsabfall von $U_{2,V} = 20\,V - 9{,}75\ V = 10{,}25\ V$ statt 10 V.

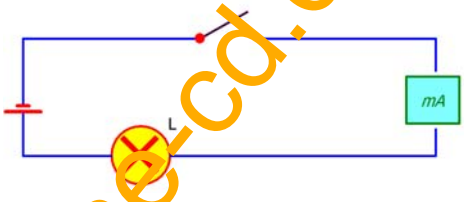
Ergebnis: Durch die Anwesenheit des Voltmeters wird für $R_1$ statt 10 V 9,75 V angezeigt, also hat die Spannung nur um $\Delta V = 0{,}25\ V$ abgenommen, das sind nur noch 2,5% Fehler!

Demo-Text für www.mathe-cd.de

## 3.4 Wie muss man ein Amperemeter in einen Stromkreise einbauen?

Ein Amperemeter muss natürlich unverzweigt im Stromkreis liegen, da es den Gesamtstrom und nicht einen “Parallelstrom“ messen soll. Und klar ist auch, dass es einen möglichst kleinen Innenwiderstand haben muss, damit es nicht durch seine Anwesenheit die Stromstärke zu sehr verringert.

***Eine Rechenaufgabe zur Abbildung:***




Einer Stromquelle mit 220 Volt Gleichstrom wird ein Strom der Stärke $I = 20\text{ mA}$ entnommen.

Im Stromkreis befindet sich eine Glühlampe L..

Diese hat folglich den Widerstand $R = \frac{U}{I} = \frac{220}{0{,}02}\Omega = 11.000\ \Omega$.

Nun schalten wir ein Amperemeter dazu, das den Innenwiderstand $R_A = 200\ \Omega$ hat.

Damit erhöht sich der Widerstand auf $11200\ \Omega$ und die Stromstärke verringert sich auf

$$I_A = \frac{U}{R_{ges}} = \frac{220\text{ V}}{11200\ \Omega} \approx 0{,}0196\text{ A} = 19{,}6\text{ mA}$$

Sie hat daher um $\Delta I = 0{,}4\text{ mA}$ abgenommen. Das entspricht 2%.

Nun verwenden wir ein Amperemeter, das den Innenwiderstand $500\ \Omega$ hat.

Damit erhält man einen Gesamtwiderstand von $11500\ \Omega$ und eine Stromstärke von

$$I = \frac{220\text{ V}}{11500\ \Omega} = 0{,}0191\text{ A} = 19{,}1\text{ mA}.$$

Das sind 0,9 mA weniger, also 4,5 %.

Damit erkennt man das Grundprinzip dieser Messgeräte:

**Voltmeter** werden parallel geschaltet und benötigen einen hohen Innenwiderstand

**Amperemeter** werden in Reihe geschaltet und benötigen einen niederen Innenwiderstand.

Demo-Text für www.mathe-cd.de